DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

DOMINIO DE FUNCIONES MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

Liliana Lupo (*)

RESUMEN

El objetivo de la investigación fue determinar el nivel de dominio de tópicos relativos a funciones matemáticas (porcentaje, proporcionalidad, funciones y biyecciones) en estudiantes de ingeniería del primer semestre de la Universidad Católica Andrés Bello. Se aplicó una prueba mixta de 19 preguntas, a una muestra de 244 alumnos de las diferentes escuelas de la Facultad. Los principales resultados obtenidos en este estudio fueron: 1) los estudiantes repitientes obtienen mayor número de respuestas correctas que los estudiantes nuevos, 2) los menores aciertos se obtienen en las preguntas relacionadas con biyecciones, 3) el concepto de proporcionalidad entre dos variables presenta errores significativos, 4) los estudiantes no conciben la biyección dentro del concepto de función y 5) los esquemas de biyecciones son más fáciles de reproducir que los de las funciones no biyectivas. Los resultados del estudio revelan que la enseñanza de las funciones no es tarea sencilla, por lo que se hace necesario desarrollar planes de estudio que ayuden a los estudiantes a consolidar este concepto.
Palabras clave: funciones, porcentajes, proporcionalidad, biyecciones.

ABSTRACT

The objective of the investigation was to determine the handling level of topics related to mathematical functions (Percentage, proportionality, functions and bijections) in students of engineering of the first semester At the Catholic University Andrés Bello. We applied a mixed test of 19 questions, to a sample of 244 students of the different schools of the Faculty. The main results obtained in this study were: 1) Students repeating the courses obtain greater number of correct answers that the new students, 2) the smaller number of successes are obtained in the questions related to bijections, 3) the concept of proportionality between two variables presents significant errors, 4) the students do not conceive the bijection inside the concept of function and 5) the bijections schemas are easier to reproduce than the corresponding to non bijective functions. The results of the study reveal that the teaching of functions is not a simple task, for which is necessary to develop plans of studies that help the students to consolidate this concept.
Keywords: functions, percentages, proportionality, bijections.

(*) Profesora de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello, llupo@ucab.edu.ve

Recibido:	Julio 2005
Aceptado:	Octubre 2005

DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.5000010

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

INTRODUCCIÓN

La teoría actual de las funciones matemáticas abarca un amplio dominio de las matemáticas en los programas de formación y se hace difícil precisar sus aplicaciones dada su importancia en un amplio campo del conocimiento.

Su importancia es notable también desde el punto de vista histórico. Matemáticos como Newton (1642-1727) y Leibnitz (1646-1716) en sus elaboraciones originales de Cálculo Infinitesimal, consideraron curvas y variables aunque no hicieron referencia explícita a las funciones.

En el inicio del siglo XVII, cuando el estudio de la naturaleza empezó a basarse en la observación de fenómenos y en las leyes que buscaban explicarlos, surgen las primeras ideas sobre el concepto de función. Así, históricamente, el estudio de las funciones está relacionado con la necesidad de resolver situaciones y problemas que surgen de la relación del hombre con su medio ambiente. Galileo Galilei (1564-1642) e Isaac Newton utilizaron en sus trabajos las nociones de ley y dependencia entre fenómenos, que están directamente relacionados al concepto de la función.

Leibnitz utilizó el término función para designar un cierto tipo de fórmula matemática y la concebía, según Baumgart (1992) como cualquier cantidad asociada a una curva, como las coordenadas de un punto de la curva o la longitud de un segmento tangente. La expresión “función” aparece en la obra matemática de Leibnitz en 1673, en *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*.

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

En el siglo XVII, el matemático suizo Jean Bernoulli (1667-1748) a partir de un criterio algebraico, utilizó el término función para designar valores obtenidos a partir de operaciones entre variables y constantes, y representaba las funciones a través de la notación Φx. En ese mismo siglo, el matemático Leonhard Euler (1707-1783) utilizando un criterio geométrico definía función como la relación entre las dos coordenadas de los puntos de una curva trazada a mano en un plano y usó la expresión f(x) para designar una función cuya variable es x. En su obra *Introductio in Analysin Infinitorium* de 1748 definió la función como *"una expresión analítica en general compuesta por esta cantidad variable y por algunos números o cantidades constantes".*

A pesar de que el concepto de función fue ampliamente utilizado durante el siglo XVIII, la definición que más se aproximó a la que actualmente aceptamos fue presentada apenas en la primera mitad del siglo XIX, por el matemático alemán Peter G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien escribió:

> *"Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello. Dos variables X y Y están asociadas de tal forma que al asignar un valor X, entonces por alguna regla o correspondencia, se asigna un valor a Y, se dice que Y es una función (unívoca) de X, a la que se asignan libremente valores, se llama variable independiente, mientras que la variable Y, cuyos valores dependen de X, se llama variable dependiente. Los valores permitidos de X constituyen el dominio de definición y los valores que toma Y, constituyen su recorrido."*

Numerosas investigaciones han tenido como objeto de estudio el tema de funciones matemáticas en el campo de la Didáctica de la Matemática, desde

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

enfoques muy diversos. Haciendo una revisión bibliográfica se pueden considerar tanto estudios basados en la evolución histórica del concepto, como aquellos que inciden en su evolución en los libros de texto (Markovits, 1986), otros enfocados en las dificultades que conlleva (Ruiz Higueras, 1984), en su comprensión (Tall y Vinner, 1981), o en las formas de representación (Sierra, M. González, M.T. y López, M. 1998) o los numerosos artículos con propuestas didácticas para su enseñanza. El concepto de función (como la mayoría de los conceptos matemáticos) es abstracto por lo que resulta conveniente expresarlo mediante representaciones (Duval, 1993).

El análisis histórico-epistemológico realizado por Sfard (1991) basado en las diferentes definiciones y representaciones concluye que la noción de función puede concebirse de dos formas: estructuralmente (como un objeto) u operacionalmente (como un proceso). Los alumnos de educación secundaria manejan el concepto de función desde un punto de vista operativo (Sfard, 1991) es decir, como un proceso, por lo que necesitan que se diseñen actividades de instrucción específicas para que manejen las funciones como un objeto. La transición desde la concepción “proceso” a la concepción “objeto” es lenta y difícil. Sfard propone tres fases en la evolución del continuo proceso-objeto: interiorización, condensación y reificación.

El concepto de función es un elemento fundamental de los programas de matemática debido a su importancia en el desarrollo de capacidades para comprender las estructuras fundamentales de las ciencias y la matemática avanzada (Carlson, Smith, y Persson, 2003; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, y Vidakovic, 1996; Kaput, 1992; Rasmussen, 2000; Thompson, 1994ª; Zandieh, 2000).

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Numerosas investigaciones consideran que la formación matemática de la mayoría de los jóvenes bachilleres, inclusive los que ingresan a las universidades, es deficiente tanto en conocimientos como en habilidades. Desde 1883, se han hecho esfuerzos para que los planes de estudio de la escolaridad anterior al ingreso a la universidad, hagan mayor énfasis en el tema de funciones. (Collage Entrante Examination Borrad, 1959; Hamley, 1934, Hedrick, 1922; Klein, 1883; Nacional Council of Teachers of Matemathicss 1934, 1989, 2000). A pesar de estos esfuerzos, los estudiantes salen de la escuela secundaria con una comprensión débil de este concepto tan importante (Carlson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Thompson, 1994a). La investigación educativa apunta a la creación de planes de estudio que ayuden a desarrollar los conceptos relacionados con las funciones, en contextos donde los estudiantes utilicen el razonamiento matemático. Las investigaciones recientes sugieren que la instrucción matemática de los planes de estudio actuales, no desarrolla en los estudiantes los niveles de comprensión necesarios sobre este concepto.

Los estudios han revelado que el aprendizaje de los conceptos relacionados con las funciones matemáticas es complejo (Carlson, 1998; Thompson, 1994a). Las investigaciones en los últimos diez años en ese campo, apuntan a generar modelos de enseñanza que fortalezcan estos conceptos (Carlson, 1998; Thompson, 1994a).

Desde principios de los 90 los libros de texto proponen una orientación más conceptual en los temas de funciones, por ejemplo: Cálculo de Harvard (Hughes-Hallett & Gleason, 1994).

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y por consecuencia de los tópicos relativos al tema de funciones en el sistema educativo

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

venezolano, está presente en las salas de clase desde las series iniciales de enseñanza (escuela básica) hasta las series finales de enseñanza en el bachillerado (ciclo diversificado). A los alumnos que ingresan a las Universidades nacionales se les exigen competencias en los temas relacionados funciones.

En el presente artículo se muestran los resultados de una investigación realizada en una muestra de estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello, sobre el dominio de cuatro tópicos relativos a funciones matemáticas (proporcionalidad, porcentajes, funciones y biyecciones). Estos tópicos fueron escogidos porque forman parte de los programas de matemática de la escolaridad que cualquier estudiante universitario cursó previamente a su ingreso en cualquier institución de educación superior.

METODOLOGÍA PARA LA RECOLECCIÓN DE LOS DATOS DE LA INVESTIGACIÓN

Los resultados que se comentan en este trabajo fueron detectados a través de un cuestionario (Anexo 1) aplicado en abril de 2005 a 244 alumnos cursantes del primer semestre de la carrera de Ingeniería.

Las preguntas del cuestionario fueron seleccionadas en su mayoría, de textos actuales para la educación del ciclo básico y diversificado en los temas de funciones.

El cuestionario consta de 19 preguntas, agrupadas en 8 secciones. De las 19 preguntas, 13 son cerradas y 6 son abiertas. Las preguntas abiertas se proponen con la finalidad de recoger información adicional relativa a los tópicos que aborda el cuestionario. Las cuestiones que incluye son fundamentalmente tópicos relacionados con:

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Proporcionalidad	**Funciones**	**Biyecciones**	**Funciones y Biyecciones**
Reconocer si dos series de números son proporcionales	Suma de dos naturales	¿Se puede definir una biyección de un conjunto de dos elementos hacia otro de tres?	Representar todas las funciones de A hacia B. Reconocer las que son biyecciones
Problema de porcentaje		Definición de biyección entre dos conjuntos dados	Dada una relación R definida por su grafo o por su esquema cartesiano, determinar si es función y biyección
Problema de escalas		Encontrar el valor de una función sabiendo que es una biyección en un conjunto dado	

Tabla 1: Tópicos estudiados en la investigación.

El trabajo de investigación se llevó a cabo en etapas.

Etapa I: Selección de la muestra.

La selección de la muestra fue aleatoria. Los alumnos que respondieron el cuestionario lo hicieron de forma voluntaria. La participación o no en este estudio no tuvo influencia alguna en la calificación final obtenida en la asignatura.

A continuación se muestra la distribución de los estudiantes participantes según la sección que cursaban y su condición en la asignatura (nuevos, si estaban cursando la materia por primera vez; repitientes, si estaban cursando la materia por segunda, tercera o cuarta vez).

Sección	Número de estudiantes	Condición en la asignatura
Civil 001	20	Repitientes
Civil 004	35	Nuevos
Telecomunicaciones 006	30	Nuevos
Telecomunicaciones 001	36	Repitientes
Industrial 005	30	Nuevos
Industrial 002	36	Repitientes
Informática 006	31	Nuevos
Informática 008	26	Repitientes
TOTAL	244	

Tabla 1. Distribución de los alumnos participantes en la aplicación del cuestionario.

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

La selección de estas 8 secciones se realizó al azar de un total de 24 que se abrieron durante ese semestre.

Etapa II. Aplicación del cuestionario.

El cuestionario fue aplicado entre el 11 y el 15 de abril de 2005 en horas de clase de Cálculo I (materia del primer semestre de la carrera). La investigadora estuvo presente en algunas secciones pero en otras la aplicación estaba a cargo del profesor de la asignatura. Las instrucciones para la aplicación se indicaron por escrito y el aplicador (investigador o profesor) se limitó a leerlas en voz alta. Los alumnos tuvieron 30 minutos para responder a las cuestiones de forma anónima. Transcurrido el tiempo el aplicador recogió los cuestionarios.

Etapa III. Recolección de los datos.

En el Anexo 2 se presentan los porcentajes de aciertos en las respuestas dadas por los estudiantes en las preguntas 1a, 2a, 3, 4a, 4b, 4c, 5a, 6a, 6b, 6c, 7, 8a, 8b en el cuestionario aplicado.

ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LOS DATOS RECOGIDOS EN LA INVESTIGACIÓN

El resultado de las secciones de alumnos repitientes fue mejor que el de los alumnos nuevos en la mayoría de las cuestiones, sin embargo el grado de dificultad con que los alumnos (nuevos y repitientes) percibieron las preguntas fue aproximadamente el mismo: las que se referían a proporcionalidad fueron las más sencillas y las referidas a funciones y biyecciones las más difíciles.

A continuación se muestran los resultados totales de las preguntas bien resueltas:

Temas	Tópicos	Pregunta	Porcentaje Total	Porcentaje nuevos	Porcentaje repitientes
Proporcionalidad	Reconocer si dos series de números son proporcionales	1a	91	84	98

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

	Problema de porcentaje	3	50	43	54
	Problema de escala	7	40	37	44
Funciones	Suma de dos naturales	4a	46	36	54
		4b	45	32	55
		4c	33	23	44
Bisecciones	¿Se puede definir una biyección de un conjunto de dos elementos hacia uno de tres?	2a	24	26	19
	$z \to z$ $x \to 3x$ ¿Biyección?	6a	46	30	60
		6b	43	26	54
		6c	7	6	8
Funciones y bisecciones	Representar todas las funciones de A hacia B. Reconocer las que son biyecciones.	5a	22	14	30
	La relación definida por su grafo. ¿Función? ¿Biyección?	8a	16	8	22
		8b	9	6	11

Tabla 2. Porcentaje total de respuestas acertadas por pregunta.

En las respuestas dadas por los estudiantes se manifestaron de manera aislada o simultáneamente, falta de atención en las lecturas y poca relación entre la realidad y las situaciones planteadas en las preguntas.

Es importante destacar que el número de cuestiones sin respuesta fue menor en los grupos de alumnos repitientes. La existencia de preguntas sin respuesta trajo como consecuencia que el porcentaje de respuestas equivocadas fuera relativo, pues se consideró también como respuesta errada aquellas respuestas ausentes.

RESULTADOS ENCONTRADOS EN LOS TÓPICOS RELACIONADOS CON LA PROPORCIONALIDAD

La pregunta 1a fue respondida correctamente por el 91% de los alumnos (el porcentaje más alto de respuestas correctas), aunque las justificaciones a esa respuesta presentaron en la mayoría de los casos errores significativos. Se

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

muestran a continuación algunas respuestas dadas en la pregunta 1b para justificar la respuesta correcta dada en la 1a:

"A medida que los kilómetros van aumentando mayor es el consumo de litros de gasolina"
"Por cada litro de gasolina consumido hay una cantidad de kilómetros recorridos"
"De acuerdo a la distancia recorrida, el consumo de gasolina aumenta o disminuye"

El concepto de proporcionalidad entre dos variables efectivamente conduce a que si una variable aumenta la otra también, pero lo que en estas respuestas no se considera es que dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre ambas es constante.

El porcentaje de aciertos en la pregunta 3 fue del 50% en todas las secciones. En las respuestas incorrectas, respondieron número de niños en lugar de su porcentaje o en algunos casos, respondieron número de niñas o su porcentaje.

El porcentaje de aciertos en la pregunta 7 fue del 40% en todas las secciones. Muchas respuestas correctas numéricamente no estaban acompañadas de la unidades respectivas, en ese caso se contabilizaron como incorrectas. Se observó en la mayoría de los casos en los que la respuesta estaba incorrecta numéricamente, falta de atención entre la realidad y la situación planteada, en respuestas como:

"El largo del jardín en el plano es de 2800 m"

"El largo del jardín en la realidad es de $\frac{1}{1400}$ *cm"*

RESULTADOS ENCONTRADOS EN LOS TÓPICOS RELACIONADOS CON FUNCIONES

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Los porcentajes de aciertos en las preguntas 4a y 4b en todas las secciones fueron similares (46% y 45%, respectivamente). Se observaron contradicciones en las repuestas dadas pues muchos alumnos respondían Sí a la cuestión 4a y No en la 4b y viceversa, cuando el contenido en ambas preguntas era el mismo, sólo que en la cuestión 4b se preguntaba directamente si lo planteado era una función y en la cuestión 4a se preguntaba si en lo planteado se daban las condiciones para que fuera una función.

El porcentaje de aciertos en la pregunta 4c fue del 33% en todas las secciones. Fue la cuestión con menos aciertos de la pregunta 4, debido posiblemente a errores en la interpretación de los términos “antecedente” y “par ordenado”.

RESULTADOS ENCONTRADOS EN LOS TÓPICOS RELACIONADOS CON BIYECCIÓN

El porcentaje de aciertos en la pregunta 2a fue del 24% en todas las secciones. Es uno de los porcentajes más bajos, lo que evidencia las dificultades que los alumnos presentan en la comprensión del concepto de biyección. En la mayoría de las respuestas equivocadas de la cuestión 2a, se nota la influencia de la idea de reciprocidad, idea que está implícita en la noción de biyección y que los alumnos tienden a mezclar en los esquemas. Un gran número de estudiantes no respondieron la pregunta alegando que no sabían qué era biyección. En el grupo que respondió correctamente, se detectó que en muchos casos no la justificaron y en los casos que justificaban, dificultad para hacerlo, por un uso indebido del vocabulario, así como una franca confusión del concepto de biyección con otros, principalmente función. Se muestran a continuación algunas respuestas dadas en la pregunta 2b para justificar la respuesta correcta dada en la 2a:

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

"Para que se de una biyección es necesario que cada elemento de la llegada tenga una imagen"
"Porque biyección es cuando ambos son equivalentes"
"El conjunto de partida tiene una y sólo una imagen en la llegada"
"Si se coloca la misma imagen para dos de los elementos del conjunto F"
"El conjunto de salida tiene una sola imagen en la llegada"
"Porque desde el momento que hay dos conjuntos no vacíos se puede siempre definir una biyección"

Los porcentajes de aciertos en las preguntas 6a y 6b en todas las secciones fueron muy similares (46% y 43%, respectivamente). La finalidad de estas preguntas fue constatar si los alumnos saben calcular las imágenes de algunos números por una función sencilla de $Z \to Z$, si saben detectar el antecedente de algunos números por esa función y si pueden determinar si tal función es o no biyectiva. El cálculo de imágenes y de antecedentes fue logrado por un porcentaje significativo, pero no todos supieron interpretar la notación $F(x)$. Sólo un 7% (uno de los porcentajes más bajos) pudo determinar que la función era biyectiva. Lo anterior denota una vez más, una deficiencia importante en el manejo del concepto de biyección.

RESULTADOS ENCONTRADOS EN LOS TÓPICOS RELACIONADOS CON FUNCIONES Y BIYECCIONES

El porcentaje de aciertos en la pregunta 5a fue del 22% en todas las secciones. Este porcentaje es uno de los más bajos. En un número considerable dibujaron como biyección el producto cartesiano $A \times B$.

En la pregunta número 5 se puso de manifiesto que para los alumnos que respondieron el cuestionario, los esquemas de las biyecciones son más fáciles de reproducir que los de las funciones no biyectivas. Un significativo número de estudiantes no respondieron a la cuestión 5a y la mayoría de los que respondieron

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

no dibujaron más que los esquemas de las biyecciones y de ellos, la mayoría las encuadraron, indicando así que, para ellos, son las únicas funciones posibles o bien consideran función y biyección como sinónimos.

Otros alumnos consideraron los esquemas de las biyecciones como funciones no biyectivas y dibujaron como esquemas de biyecciones cada una de las biyecciones recíprocas.

Los porcentajes de aciertos en las preguntas 8a y 8b en todas las secciones fueron muy similares y muy bajos (16% y 9%, respectivamente). La pregunta 8 mostró que los estudiantes no comprenden bien las relaciones entre conjuntos; ni a través de su esquema cartesiano y menos aún a través de su grafo. Reveló también un mal empleo en el vocabulario y un desconocimiento de la inclusión de las biyecciones dentro de las funciones. A continuación se presentan algunas respuestas dadas en la pregunta 8:

¿Es R una función?. No
Justifique su respuesta. Porque no hay dos conjuntos diferentes.
¿Es R una biyección? Si
Justifique su respuesta. No tengo idea.

¿Es R una función?. Si
Justifique su respuesta. Se pueden establecer correpondencias.
¿Es R una biyección? Si
Justifique su respuesta. Los conjuntos son iguales.

¿Es R una función?. Si
Justifique su respuesta. E=F
¿Es R una biyección? Si
Justifique su respuesta. E=F

DIFICULTADES ENCONTRADAS LIGADAS AL VOCABULARIO

En el análisis de las repuestas dadas en las preguntas abiertas, se observa que en general, los alumnos tienen dificultad para interpretar y emplear el lenguaje

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

y, en particular, el vocabulario matemático fundamental para el estudio de las funciones. Así confunden, “conjunto de llegada” y “conjunto de salida”, “dominio” y “rango”, “conjunto” y “elemento” y también emplean erróneamente las notaciones (preguntas 1,3 y 6).

No fue fácil, en ocasiones, entender las justificaciones cuándo hay confusión en el vocabulario y cuándo son los conceptos los que se confunden.

En la pregunta 4, los alumnos manifestaron confusión con la interpretación de la tabla, pues se observaron contradicciones en las respuestas de las preguntas 4a y 4b.

En las preguntas donde se les pide justificar la respuesta, se observó la dificultad de muchos alumnos para emplear correctamente el vocabulario, así como una notable confusión del concepto de biyección con el concepto de función.

A continuación se presentan algunas respuestas dadas en la pregunta 2b:

“No todos los conjuntos de E tienen su conjunto de llegada en F” .

(Tal vez quiso decir elemento en vez de conjunto).

“Porque los conjuntos de partida son menos que los de llegada”.

(Tal vez quiso decir elemento en vez de conjunto).

“En E hay dos letras y en F tres cifras”.

(Tal vez quiso decir elemento en vez de letra o cifra).

A continuación se presentan algunas respuestas dadas en la pregunta 8b y 8d:

“Porque se pueden hacer correlaciones”. (Tal vez quiso decir correspondencias).

“Para que un conjunto sea una biyección es necesario que cada número del conjunto de partida tenga una imagen”. (Tal vez quiso decir relación en vez de conjunto y elemento en vez de número).

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los alumnos repitientes muestran porcentajes más altos de respuestas correctas que los alumnos nuevos, esto pudiera explicarse porque en el programa de la asignatura de Cálculo I, se contempla el tema de funciones reales.

Las preguntas relacionadas con proporcionalidad obtuvieron los porcentajes más altos de respuestas correctas, sin embargo, el concepto de proporcionalidad entre dos variables presenta errores significativos, pues para un gran número de estudiantes las magnitudes mencionadas en la pregunta 1 del cuestionario eran proporcionales "porque al aumentar una aumenta la otra", sin considerar que la razón entre ambas magnitudes (la dependiente y la independiente) tiene que ser constante.

Los menores porcentajes de respuestas correctas se obtienen en las preguntas relacionadas con biyecciones. Los alumnos reportan no recordar el concepto de biyección y otros lo confunden con el concepto de función. Esta última confusión es notable y se evidencia en las justificaciones que los alumnos dan en las preguntas abiertas. Los estudiantes no conciben la biyección dentro del concepto de función y los esquemas de biyecciones son más fáciles de reproducir que los de las funciones no biyectivas. Hay que hacer notar, que si bien a nivel gráfico la biyección parece ser un concepto más simple que el de función, en cuanto a justificar que una relación dada es una función biyectiva es más fácil explicar que es una función, que justificar que además es una biyección.

En un porcentaje significativo, los alumnos responden correctamente a las preguntas pero la justificación está cargada de errores, evidenciando dificultades para expresarse y confusiones en las definiciones.

CONCLUSIONES

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

No es fácil evaluar el aprendizaje de la noción de función en forma aislada, ya que la falta de dominio en el cálculo aritmético o en el manejo del lenguaje algebraico intervienen en forma definitiva en la resolución de las preguntas del cuestionario. Esta investigación no intenta señalar resultados definitivos, sino describir la problemática encontrada luego del análisis de los datos recogidos.

Las dificultades derivadas de la notación simbólica, del vocabulario y de las representaciones gráficas, aspectos todos de los que no se puede prescindir en el estudio de las funciones, obligan a los profesores y autores de libros de texto a tener mucho cuidado con su dosificación para no llevar a los alumnos a las confusiones que acabamos de señalar.

Si en los últimos años la investigación educativa apunta a la creación de planes de estudio que ayuden a desarrollar los conceptos relacionados con las funciones, en contextos donde los estudiantes utilicen el razonamiento matemático; los resultados obtenidos en esta investigación sugieren que la instrucción matemática de los planes de estudio actuales, no desarrolla en los estudiantes los niveles de comprensión necesarios sobre este concepto.

Es importante destacar que a los estudiantes del primer semestre de la asignatura de Cálculo I, le son presentadas definiciones y generalizaciones relacionadas con el tema de funciones que traen dentro de si un grado elevado de abstracción, resultado de una profunda interacción entre análisis y síntesis y que, todavía, los estudiantes de modo general no tienen condiciones de realizar, pues pese a que en su mayoría los contenidos que se abordan en la signatura son contenidos que ya han sido trabajados en los cursos de matemática del bachillerato, el abordaje memorístico y de repetición, hace que el estudio de las funciones en la enseñanza media, diversificada y en los primeros semestres de los

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

cursos universitarios el área científica y tecnológica, se transforme en algo extremamente abstracto y formal.

Los resultados encontrados ponen de relieve que la enseñanza de las funciones no es tarea sencilla, por lo que se hace necesario desarrollar planes de estudio que ayuden a los estudiantes a consolidar el concepto de función durante los años de formación en el bachillerado (escuela básica y ciclo diversificado) de la escolaridad en Venezuela, así como también elaborar un diseño instruccional que redimensione la forma en que estos tópicos relativos a funciones matemáticas (proporcionalidad, porcentajes, funciones y biyecciones) son abordados en los cursos de matemática inicial (propedéutico y Cálculo I) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello, para mejorar sustancialmente su dominio en los estudiantes que ingresan a esta universidad.

REFERENCIAS

Baumgart, Jhon K. (1992). *Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula*. Sao Paulo: Atual.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education* (pp. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society.

Carlson, M. P., Smith, N., y Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. In N. A.

Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, Vol. 2 (pp. 165-172). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

College Entrance Examination Board. (1959). *Program for college preparatory mathematics.* New York: Commission on Mathematics.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Duval, R. (1993) *Registres de répresentation sémiotique et fonctionnemente cognitif de la penseé : Annales de Didactique et de Scienes Cognitives 5*. Strasbourg: IREM.

Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *MAA Notes, 25.* Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Klein, F. (1883). Ueber den allgemeinen Functionbegriff und dessen Darstellung durch eine willknerliche Curve. *Mathematischen Annalen, XXII,* 249.

Hamley, H. R. (1934). The history of the function concept. In W. D. Reeve (Yearbook Ed.) & H. R. Hamley (Vol. Author), *The ninth yearbook of the National Council of Teachers of*

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Mathematics: Relational and functional thinking in mathematics (pp. 48-84). New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Hedrick, E. R. (1922). Functionality in the mathematical instruction in schools and colleges. *The Mathematics Teacher, 15,* 191-207.

Hughes-Hallett, D., y Gleason, A. M. (1994). *Calculus.* New York: Wiley.

Markovitz, E. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics 6*(2), 18-24.

National Council of Teachers of Mathematics. (1934). *Relational and Function Thinking in Mathematics, 9.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rasmussen, C. L. (2000). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 55-87.

Ruiz Higueras, L. (1984) *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función*. Análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1998). Funciones: traducción entrerepresentaciones. *Aula, 10*, 89-104.

Tall, D. y Vinner, S (1981*).* Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Thompson, P. W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 229-274.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV. CBMS Issues in Mathematics Education* (pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Anexo 1

CUESTIONARIO A

A continuación se presentan una serie de proposiciones que agradecería usted respondiera de forma individual. Para ello dispone de 30 minutos. Este cuestionario es un instrumento para la recolección de datos de un estudio realizado por la Lic. Liliana Lupo en su trabajo de investigación **ALGUNAS DEFICIENCIAS EN EL APRENDIZAJE DE TÓPICOS RELATIVOS A FUNCIONES MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DEL PRIMER SEMESTRE DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO.**

1. El cuadro siguiente muestra los consumos de gasolina de un vehículo en relación al número de kilómetros recorridos:

Número de Km. Recorridos.	110	100	210
Número de litros consumidos	11	10	21

a.- ¿El número de kilómetros recorridos es proporcional al número de litros de gasolina consumida por el vehículo? Si _____________ No _____________
b.- Justifique su respuesta
____
____
____

2. Se tienen dos conjuntos $E=\{a,b\}$ y $F=\{1,2,3\}$.

a.- ¿Se puede definir una biyección de E hacia F ? Si _____________ No _____________
b.- Justifique su respuesta
____
____
____

3. En un grupo de 25 alumnos hay 12 niñas ¿Qué tanto por ciento hay de niños respecto al conjunto de alumnos del grupo? _____________

4. Está tabla nos muestra la relación s llamada "suma", entre cada par ordenado de naturales y su suma, por ejemplo $s(2,3)=5$.

a.- ¿A todo par ordenado de naturales se puede asociar un solo natural por la relación s ?
Si _____________ No _____________

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

b.- ¿ Es s una función? Si _____________ No _____________
c.- ¿Cada natural tiene como antecedente según la relación s un par ordenado único?
Si _____________ No _____________

5. Se consideran los conjuntos $A = \{a,b\}$ $B = \{0,1\}$.

a. ¿Cuántas funciones diferentes de A hacia B se pueden encontrar _____________ ?.
b. Haga un esquema para cada una de ellas. Encuadre las que son biyecciones.

6. F es la función de z en z tal que $x \to 3x$.

Complete:
a.- $F(-5) =$ ______
b.- Si $F(x) = -12$, entonces $x =$ ______
c.- ¿Es F una biyección? Si _____________ No _____________
d.- Justifique su respuesta ____
____
____

7. En el plano de una casa la escala es de 1/200. Si el largo del jardín en la realidad es de 14 m, ¿Cuál es el largo de jardín en el plano? _____________

8. $G = \{(1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,1)\}$ es el grafo de una relación R en los conjuntos $E = \{1,2,3,4,5\}$ y $F = \{1,2,3,4,5\}$.

a.- ¿Es R una función? Si _____________ No _____________
b.- Justifique su respuesta
____
____
____
c.- ¿Es R una biyección? Si _____________ No _____________
d.- Justifique su respuesta
____
____
____

DEP. LEGAL: PPX 200502ZU1935 / ISSN: 1856-1594 / Directorio LATINDEX: 14.510

Muchas gracias por su colaboración